OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2026
CLASA a XII- a

- **Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.**
- **A versenylapra a teljes megoldást írjátok le.**
- **A munkaidő három óra.**

I Tétel (20 pont)

Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(1-x)^2\cdot e^{-x}, & x\in(-\infty,1]\\ \frac{ln^2 x}{x}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ függvény primitiválható $\mathbb{R}$-en és határozd meg azt az F primitív függvényét, amely teljesíti a következő feltételt $F(e)+F(0)=\frac{-2(e+3)}{3e}$.

II Tétel (20 pont)

Adott $(G,\cdot)$ egy multiplikatív csoport, $e\in G$ a csoport semleges eleme.
Tekintsük $a,b\in G$ a következő tulajdonsággal $a^3=e$ és $a^2ba^{-2}=b^4$.
Igazold, hogy $b^{63}=e$.

III Tétel (25 pont)

Adott $M=(-\infty,1)$ és $(x,y)\to x\circ y$ tipusú függvény, ahol $(x,y)\in M\times M$ és $x\circ y=\frac{2025-xy}{2026-x-y}$.

a) Igazold, hogy az $(x,y)\to x\circ y$ képlet egy műveletet értelmez az M halmazon.

b) Igazold, hogy a $\circ$ művelet kommutatív és asszociatív művelet, de nem rendelkezik semleges elemmel.

IV Tétel (25 pont)

Határozd meg $\int\frac{x^2-x-1}{(x^2+x+1)^3}dx$, ahol $x>0$.